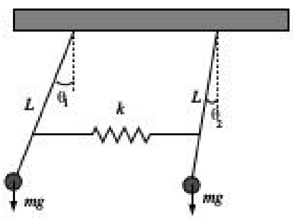
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
Equations Différentielles et Introduction à l'Automatique
Juillet 2011

Exercice 1

On considère le système formé par deux pendules simples, chacun de masse m et de longueur L, qui sont couplés par un ressort de raideur k.



En désignant par θ_j l'angle que formé le pendule j avec la verticale, le mouvement de ce système est gouverné par

$$\theta_1'' + \omega^2\theta_1 + h(\theta_1 - \theta_2) = 0,$$
$$\theta_2'' + \omega^2\theta_2 - h(\theta_1 - \theta_2) = 0,$$

où $h = k/m$, $\omega^2 = g/L$ avec g l'accélération de la pesanteur.

a) Ecrire ces équations sous forme d'un système linéaire et trouver une matrice fondamentale associée. On rapelle qu'une matrice fondamentale est une matrice (inversible) dont les colonnes sont des solutions linéairement indépendantes.

b) Trouver la solution qui correspond aux conditions initiales $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$, et $\theta_1'(0) = \theta_2'(0) = 0$. Quel est l'effet du ressort dans ce cas?

c) Trouver la solution qui correspond aux conditions initiales $\theta_1(0) = -\theta_2(0) = \theta_0$, et $\theta_1'(0) = \theta_2'(0) = 0$. Quel est l'effet du ressort dans ce cas?

d) Trouver la solution qui correspond aux conditions initiales $\theta_1(0) = \theta_0$, $\theta_2(0) = 0$, et $\theta_1'(0) = \theta_2'(0) = 0$. Trouver la condition sur k pour que cette solution soit périodique.

Exercice 2

Soit $\mathbf{A}$ une matrice constante. On suppose que σ n'est pas une valeur propre de $\mathbf{A}$.

a) Montrer que le système non homogène $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}e^{\sigma t}$ admet une solution de la forme

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{c}e^{\sigma t}$$

et donner $\mathbf{c}$ en fonction de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$.

b) Montrer que le système non homogène $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{j=0}^{k} \mathbf{b}_j t^j e^{\sigma t}$ admet une solution de la forme

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{c}_j t^j e^{\sigma t}$$

et donner $\mathbf{c}_j$ en fonction de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}_i$.

Exercice 3

Soit le système

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x' &= y(13 - x^2 - y^2), \\ y' &= 12 - x(13 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

a) Montrer que ce système est hamiltonien, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $H(x, y)$ tel que ce système s'écrit

$$\begin{cases} x' &= \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}, \\ y' &= -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}. \end{cases}$$

b) Déduire que $H(x, y)$ est constante le long des trajectoires de (S). Que peut-on dire sur les solutions de (S)?

c) Trouver les points d'équilibre de (S) et discuter leur nature.

d) Esquisser le portrait de phase de (S).